単峰分布についての一考察 (不確実・不確定環境下における数理的意思決定とその周辺)

林, 芳男

数理解析研究所講究録
第 1802 巻 2012 年 207-213

2011年度(平成23年度)RIMS研究集会(11月開催)発表原稿

単峰分布についての一考察(A Note on Unimodal Distributions)

近畿大学経営学部　林 芳男(Yoshio Hayashi)
Faculty of Business Administration,
Kinki University

(本文)Keilson and Gerber(1971)はIbragimov(1956)が展開した絶対連続分布の強単峰性の必要十分な特徴付けの理論からの連想でそれまでにはなかった離散分布の単峰性と強単峰性の理論を成功裡に打ち立てました。これは数多く有るKeilsonの論文の中では珍しく初等的で分かり易い論文で、私はこういった展開は個人的には好きではあるが、J. Keilsonが彼の一連の論文の中で首尾一貫して離散分布と呼んでいるものは、実は、整数値を取る確率変数の確率分布のことでその認識は若干精密性に欠けているように思われます。賢明なる読者がそのことで事の本質を失うことはないとは思うが、用語は正確にしておかないと初学者には色々と誤解を与えることになると私は考えています。本稿ではその点に焦点を当てて単峰性の定義の議論を進め、最終的には最も素朴な立場での単峰分布のヒンチンの積表現による必要十分な特徴付けの証明を与える。その(離散)単峰性の定義は非常に素朴で次の通りである。
Keilsonの離散単峰分布の定義：「その台のすべてが整数の離散集合上に有る(離散分布)$\{p_n\}$は、もし

$n \leqq M$なるすべてのnに対して　　$p_n \geqq p_{n-1}$,
そして$n \geqq M$なるすべてのnに対して　　$p_{n+1} \leqq p_n$

なる整数Mが少なくとも一つ存在するならば、単峰であると呼ばれる[1]」というもので、ここにその脚注[1]は、「その離散分布$\{p_n\}$の単峰性の定義にはその台が連結な離散集合上に有ることが必要である。このことは以下の記述全体でわざわざ明記することなく仮定されることになる」というものである。ここで上記の網掛けした部分は単純に見過ごしてはいけない部分である。因みに、離散分布$\{p_n\}$の台とは$\{n : p_n > 0\}$のことである。その「離散集合(=整数の部分集合)が連結である」という言い方は、整数の集合は孤立点の集まりだから、数学的には支離滅裂だと私は思うが、それは、多分、整数全体をその中だけで順序集合として見たとき、その部分集合の中の整数に途切れが無いという意味である。この定義に続いてKeilsonは、この単峰分布の定義で、「確率質量が一点だけに集中した縮退分布は単峰である」としている(これは$p_M = 1$でその他の$n \neq M$に対して$p_n = 0$なる確率分布、つまり、確実に定数Mの値を取る数値現象のことである。これは後の確率分布関数に対する台の定義と矛盾するので、台が一点集合であるというよりは寧ろ空な場合である)し、台が片側に有界、両方向に有界、或いは(両方向に)無限に拡がっている単峰分布をも容認している。つまり、上記の単峰性の定義では、その台が整数全体の集合であるときのみの概念であるように取られるかも知れないのを有限な範囲の整数の集合、非負整数の集合、負整数の集合を台に持つ確率分布の中にも単峰なものが有ることを示唆していて、実際、その論文の中で初等確率論の教科書の中に現れる多くの離散分布が単峰であることを例示してくれている。例えば、ベルヌイ分布、二項分布、1以上の整数乃至は非整数の次数の負の二項分布、ポアソン分布、一様分布はすべて単峰であることを示した。

他方、Ibragimov(1956)が依拠した単峰性の定義は、多分、その参考文献の中に有るGnedenko and Kolmogorov(1949;ロシア語版)によるものであり、Keilson and Gerber(1971)はそれのK.L.

Chungの翻訳による英語版(1954)とFeller(1966;vol. II)を引用して確認している(私はロシア語は読めないしその英語版も持っていないのでここでのその本の引用はすべて孫引きであることをご容赦下さい)。それは次のものである。

古典的な単峰分布の定義：「確率分布関数$F(x)$は、或る少なくとも一つの値$x=a$で、その関数のグラフの形状が$x<a$では凸で$x>a$では凹であるものが存在するならば、単峰であると呼ばれる」、その点aがその確率分布関数$F(x)$のモードと呼ばれるものである。この単峰性の定義がそのままKeilsonの離散単峰分布には当てはまらないことは明らかである。その定義の中の凸関数、凹関数はそれぞれの定義域の内部の点では連続であることが知られているから、その$F(\cdot)$が跳躍する可能性が有るのはその台の端点とモードの所だけである。それで離散分布の場合にも応用できそうに見えたが、Keilson and Gerber(1971)がこの定義を(絶対)連続分布に対するものだとしたのは至当であったと私は思います。因みに、確率分布関数$F(x)$の台とは$\{x: 0<F(x)<1\}$のことである。離散単峰分布の場合のコメント同様に台が有限な範囲のもの、上に有界な範囲のもの、下に有界な範囲の連続な単峰分布が有ることは指摘しておきたい。これが連続分布に対する単峰性の定義であるならば、モードaの位置で跳躍が生じる可能性は排除されるべきであるが、例外的に、$x<a$で$H(x)=0$、$a\leqq x$で$H(x)=1$なる確率分布関数$H(x)$は確実にその定数aを取る確率変数の確率分布関数と見なすことができるので、台が空な場合に相当する単峰分布であると見なされている。因みに、これの$a=0$の場合のその$H(x)$の(一般化された意味での)拡張された密度関数はディラックのデルタ関数$\delta(x)$として知られている。Ibragimov(1956)もFeller(1971;vol. II, 158頁)もそしてSudhakar Dharmadhikari and Kumar Joag-Dev(19 88)による単峰性の理論の結果を集めた単行本も台が$(-\infty,\infty)$である単峰関数を扱っている印象を持ってしまったのは私だけなのかも知れない。

Keilson(1979;63頁)はもっと素直に連続分布の単峰性を定義した。

Keilsonの連続単峰分布の定義：「確率密度関数$f(x)$は、或る少なくとも一つの値$x=a$でその形状が$x<a$では非減少で$x>a$では非増加であるものが存在するならば、単峰であると呼ばれる」としている。

単峰分布の理論の中では独立な確率変数X, Yの和$X+Y$と積XYの分布に特に関心が寄せられた。取り分け、独立な和、つまり、分布の畳み込みに関して、すべての単峰分布との畳み込みがまた単峰分布になっているものを強単峰と呼んだ。因みに、Ibragimov(1956)はロシア語からの翻訳であるがタイトルの中の"composition"は"convolution"とすべき所の誤訳なのではないかと私は疑っている。さて、Keilsonの論法は、$P(X=0)=1$なる確率変数X(の分布)は確実に定数0という値を取る(、即ち、すべての確率質量が零点だけに有る分布は単峰である)ので、それと独立な強単峰な確率変数Yとの和$X+Y$の分布はYの分布そのものであり、強単峰性の定義により、それは単峰ということになるから「強単峰分布は単峰である」と論じた(連続分布の場合のこの命題はIbragimov(1956)に依ればGnedenko and Kolmogorov(1949)に依るものであるらしい)。

Ibragimov(1956)は先ず正規分布関数が強単峰であることを示した。(そしてその補題２で)「強単峰分布関数の集合は畳み込みを取る演算と極限を取ることに関して閉じている、つまり、$F_n(x)$を確率分布関数$F(x)$に弱収束する強単峰分布関数列であるとすると$F(x)$は強単峰分布関数である」ことを示した。この後半の性質から(補題３)「$F_n(x)$は$F(x)$に弱収束する単峰分布関数列であるとする。そのときその部分列$F_{n_k}(x)$で殆ど到る所$F'_{n_k}(x)\to F'(x)$ ($n_k\to\infty$)となるものが存在する」(Gnedenko and Kolmogorov(1949))を証明し、真正な単峰確率分布関数$F(x)$は、$F(x)$が連続でかつ$\psi(x)\equiv \log F'(x)$がE上で凹関数であるときかつそのと

きに限り強単峰であるという定理を導いた。ここに、Eは$F(x)$の左右の微分係数が伴に0でない点xの集合で閉区間を形成していることが分かっている。Keilson(and Gerber(1971))はこのことを参考にして、離散単峰性に関しても「(弱)収束する単峰な離散分布の列の極限は単峰である」こと、「(弱)収束する強単峰な離散分布の列の極限は強単峰である」こと、そして「離散分布$\{p_n\}$が強単峰である必要十分条件はp_nが対数凹であること、つまり、すべてのnに対して$p_n{}^2 \geqq p_{n+1}p_{n-1}$が成り立つ」こと、さらに上記の不等式が$p_n > 0$であるすべての$n$で狭義にしか成立しないならばその離散分布$\{p_n\}$は狭義に対数凹であると呼んで(この性質をSLC性と呼んだ)、SLC性が畳み込みの下で保存される条件についての定理も幾つか並べている。このように単峰性理論では二つの独立な確率変数X, Yの和$X+Y$に拘っているが単峰なものの独立な和が必ずしも単峰にはならない例が有ることは知っておかなければならない(S. Dharmadhikari and K. Joag-Dev(1988;例題1.1,1.2,pp.11-13),Feller(1971Vol. II;168頁,問題25))。

素朴な単峰性の定義は連続な確率密度関数も離散的な確率質量分布もグラフを描いたとき山は有れば一箇所だけに限るというものであるべきである。Keilsonの離散分布の場合その確率質量の並びの中に隙間が有ってはいけないという所に私は違和感を少し感じた。ところで、離散分布とは標本空間が可算な確率空間の確率分布のことである(という定義に異を唱える人はいないであろう)。実は、実数値を取るランダムな現象を記述する標本空間R(=実数全体の集合)の中では、基底(basis)と呼ばれる任意に与えられた正数dの整数倍の数の集合$\{y : y=nd, n$は整数$\}$はdを基底とする格子点集合(lattice)と呼ばれ、格子点集合の部分集合に確率分布が定義されているときそれは離散分布なのである。Feller Vol. II(1971;138頁)ではそういう分布は算術的(arithmetic)であると呼んでいる。したがって、Keilsonの離散分布は基底が1の算術的な離散分布だったということになる。

ところで、すべての確率分布関数$F(\cdot)$は

① $F(x)=\alpha F_d(x)+(1-\alpha)F_c(x)$

という形に一意に分解することができる。ここに、αは$0 \leqq \alpha \leqq 1$なる実数で$F_d(\cdot), F_c(\cdot)$は両方とも確率分布関数で$F_d(\cdot)$は階段関数で$F_c(\cdot)$は連続関数である(Chung(1968))。$\alpha > 0$の場合、この$F_d(\cdot)$が$F(\cdot)$の離散的部分で、その跳躍点の集合は可算集合でそれを$\{x_n : n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$、$x_n$での確率質量を$p_n \geqq 0$とする。ここに、$-\infty < \cdots < x_n < x_{n+1} < \cdots < \infty$で一般性を失うことなく$x_0 \equiv 0$であるとする(もし$x_0 \equiv 0$が本来の跳躍点でなかったならば$p_0 = 0$とおくことにする)。つまり、$F_d(x) = \Sigma p_n \delta(x - x_n)$である。因みに、有理数の集合も離散的であることが知られているが、もし或る区間内の有理数点すべての上で定義された分布が有ったとすると、その分布関数は右連続なのであるから、その区間内の実数点上での値はその分布関数値の右極限で定まることになり、有理数の稠密性からそれはその区間内では実質的に連続分布になってしまう。そういう訳で離散分布の跳躍点は有理数では添字付けされないのである。この$0 < \alpha < 1$なる一般的な確率分布関数の形状は区分的連続関数である。ところでF_1とF_2が伴に同じモードνを持つ単峰な分布関数であるならばすべての$\alpha \in [0, 1]$に対して$\alpha F_1 + (1-\alpha)F_2$もまた同じモード$\nu$を持つ単峰な分布関数になる(S. Dharmadhikari and K. Joag-Dev(1988; 2頁、彼等はまた原点を端点とする任意の区間幅の一様分布のgeneralized mixtureで絶対連続な単峰分布の必要十分な特徴付けができると主張している(定理1.2; 4頁)))。したがって、確率分布関数$F(\cdot)$の離散部分$F_d(\cdot)$と連続部分$F_c(\cdot)$が同じνをモードに持つならば$F(\cdot)$のモードもνである。

Ibragimov(1956)にしてもKeilson and Gerber(1971)にしてもそれぞれの場合の単峰性の定義の特殊な場合として縮退分布の単峰性を主張しているが、素朴な立場からは、次の自明な主張

の帰結であるとすべきである。

Xが単峰分布する確率変数であるならば、任意の定数$a\neq 0$とbに対して$aX+b$もまた単峰分布することは明らかである。というのはそれが連続または離散的な場合の確率密度関数(p.d.f.)または確率質量関数(p.m.f.)がそれぞれ

$$f_{aX+b}(x)=\frac{1}{|a|}f_X\left(\frac{x-b}{a}\right) \qquad \text{または} \quad p_{aX+b}(x)=p_X\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

となるからである。(具体的には、もしXが$(0,\ 1)$上の一様分布であるとき$Y\equiv aX+b$、但し、$a\neq 0$、の確率分布はbと$a+b$の間の区間上の一様分布でその区間の上のyに対しては$f_Y(y)=1/|a|$でその他のyに対しては$f_Y(y)=0$である。)どちらの場合でも同じ$|a|$に対しては$a>0$の場合と$a<0$の場合は(お互い)**逆向きの分布**になっているのが観察できる。

Keilson(and Gerber(1971))が縮退分布の単峰性を注意する下りはIbragimov(1956)の論法に釣られたものであると思う。また「もし分布$\{p_n\}$が(強)単峰ならばその逆向き分布$\{\overline{p}_n\}$は(強)単峰である。ここに、$\overline{p}_n\equiv p_{-n}$である」という命題にも到達してたのであるから「単峰性も強単峰性も確率変数は線形変換で閉じている」という主張をしてた方が良かったと思う。因みに、Keilsonが導いた定理の中に「強単峰な離散分布のクラスは分布の逆向きを取ること、互いに畳み込みを取ること、極限を取ることで閉じている」というのが有る。

Khintchineの定理の初等的証明：二つの確率変数$X,\ Y$の積$Z\equiv XY$の確率分布を$X,\ Y$の分布から決定する。先ず$X,\ Y$の分布が伴に絶対連続である場合：

$$F_Z(z)\equiv P(XY\leqq z)=P_{X,Y}(\{(x,\ y):\ xy\leqq z\})$$

$$=\iint_{\{(x,y):\ xy\leqq z\}} f_{X,Y}(x,\ y)\,dx\,dy$$

$$=\int_0^{\infty}dx\int_{-\infty}^{z/x}f_{X,Y}(x,\ y)\,dy+\int_{-\infty}^{0}dx\int_{z/x}^{\infty}f_{X,Y}(x,\ y)\,dy \quad (\because x=0\text{なる領域の確率は}0)$$

(それぞれの領域のその固定されたxに対して)$y=y_1/x$という変数変換をすると$dy=dy_1/x$であるから)

$$=\int_0^{\infty}dx\int_{-\infty}^{z}\frac{1}{x}f_{X,Y}\left(x,\frac{y_1}{x}\right)dy_1+\int_{-\infty}^{0}dx\int_{z}^{\infty}\frac{1}{x}f_{X,Y}\left(x,\frac{y_1}{x}\right)dy_1$$

よって、zについて微分して(積分と微分の順序は交換できるとして)

② $$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|x|}f_{X,Y}\left(x,\frac{z}{x}\right)dx$$

を得る。これはParzen(1960;318頁(9.9)式)で既に与えられたものである。

さて、XとYが独立でXが$(0,\ 1)$上で一様分布するとき、先の公式②を使って

③ $$f_Z(z)=\int_0^1\frac{1}{x}f_Y\left(\frac{z}{x}\right)dx$$

を得る。さて、この式で$y=z/x$という変数変換を行うならば$dy=-(z/x^2)\,dx$で$dx/x=-dy/y$を得る。また$\boxed{\begin{array}{l}x:\ 0\to 1\\ y:\ \pm\infty\to z\end{array}}$(ここに、その複号は$z\geqq 0$又は$z<0$に応じて前者が$+\infty$、後者が$-\infty$に対応する)

という区間対応する。

よって、$z\geqq 0$のとき

$$f_Z(z)=\int_z^{\infty}\frac{1}{y}f_Y(y)\,dy$$

$z<0$のとき

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{z}\left(-\frac{1}{y}\right)f_Y(y)\,dy$$

を得る。この左側の積分が$z=0$の所で存在するためには$0<k<1$なるkに対して$f_Y(y)=O(y^{1-k})$ ($y\to 0+0$)であれば十分である。また、その無限区間での積分が存在するためには$k>1$なるkに対して$f_Y(y)=O(y^{1-k})$ ($y\to\pm\infty$)であれば十分である。これらの積分の存在の十分条件は小松勇作(1961;定理45.2,45.9,214-218頁)に依る。したがって、(何れの場合にも同じ不連続点になる可能性の有る点$z=0$は例外として)

④　$$f'_Z(z)=-\frac{f_Y(z)}{z}$$

を得る。このことは$z<0$のとき$f'_Z(z)>0$ということで$f_Z(z)$は単調増大、$z>0$のとき$f'_Z(z)<0$ということで$f_Z(z)$は単調減少で$z=0$がモードの単峰であることが分かる。つまり、XとYが独立でXが$(0,1)$上の一様分布であるとき、積$Z\equiv XY$の確率分布は$z=0$がモードの単峰分布になることが分かる。ここに、

$$f_Z(0)\equiv\int_0^\infty\frac{1}{y}f_Y(y)dy\ (>0)$$

はまるで確率変数Yの(-1)次モーメントの値の一部分である。Zの確率密度関数$f_Z(z)$の$z=0$での連続性が気になる。$f_Z(z)$が$z=0$で連続であるための必要十分条件は明らかに

⑤　$$f_Z(0)=\int_{-\infty}^0\left(-\frac{1}{y}\right)f_Y(y)dy$$

が成り立つことである。そうでないときは不連続で$F_Z(z)$は$z=0$を跳躍点に持つことになる。この不連続性を例外として許容するには古典的な単峰性の定義が必要になる。例えば、Yが非負の値しか取らない確率変数であるならば⑤の右辺は0でその等号は成立しないから$f_Z(z)$は$z<0$で$f_Z(z)=0$で$z=0$で確率質量を持ち$(0,\infty)$で単調減少な確率密度関数になる。このことは関数表示が易しい例で実際に計算して見て確認することができる。

さて、④を独立変数をyに置き換えて書き換えると

⑥　$$f_Y(y)=-yf'_Z(y)$$

であることが分かる。よって、

⑦　$$F_Y(y)=F_Z(y)-yf_Z(y)$$

であることが分かる(Shepp(1962)は$F_Z(y)$が原点をモードとする単峰分布関数であるための必要十分条件は$F_Y(y)$のすべての連続点yでそれが⑦のように書けることであるとKhintchineが示したとGnedenko and Kolmogorov(1954)を参照して述べている)。さて、$F_Y(0)=F_Z(0)$であることに注意しておこう。$F_Y(\cdot)$と$F_Z(\cdot)$は伴に確率分布関数であるから$F_Z(\cdot)$の密度関数$f_Z(\cdot)$は

⑧　$$\lim_{y\to\pm\infty}yf_Z(y)=0$$

を満たすものであることが分かる。ところで③の両辺を変数zについて$(-\infty,y)$の上で積分して積分の順序を交換できるとして交換すると

⑨　$$F_Y(y)=\int_0^1F_Z\left(\frac{y}{x}\right)dx$$

を得る。このことは何を意味するのか?これは、点$z=0$をモードとする($z=0$だけが例外的な跳躍点となり得る)絶対連続な単峰な確率分布関数$F_Z(z)$が与えられたとき⑨で与えられる$F_Y(y)$を確率分布関数に持つ確率変数Yはこれとは独立な$(0,1)$上で一様分布する確率変数Xとの積でその確率変数Zを与えることができるということを意味する。その主張はZもYも

全く任意に分布しては成立できないことは明らかである。上記の証明が正しく働く範囲の限定された性質を持つ$F_Y(\cdot)$, $F_Z(\cdot)$に限られることは言うまでもない。原点をモードとする単峰分布のこの必要十分な積表現はFeller(1971vol. Ⅱ:157-158頁)がSheppを引用してA. Khintchineが見つけた形式的判定基準(formal criterion)の確率論版(probabilistic version)と呼んで証明しているのであるが、その言い回しは私にはとても理解できないばかりか、Fellerの立てた式が⑨とは微妙にも左右辺の確率変数が入れ替わっていて、果たしてその証明が正しいものであるのかが私は疑わしく感じている。因みにShepp(1962)はその証明を特性関数を利用してやっている。

Xは連続でYが離散分布である場合(、但し、XとYは独立)：$p_n\equiv P(Y=y_n)$（但し、$n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$；$y_n<y_{n+1}$で$y_0\equiv 0$)であるとする(繰り返しになるが、もし元に与えられていたYの分布が$y_0\equiv 0$の位置のものに確率質量がなかったとすると$p_0\equiv 0$と置く)。

$$F_Z(z)\equiv P(XY\leqq z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}P(Xy_n\leqq z)P(Y=y_n)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}p_nP(Xy_n\leqq z)$$

である。ここに、このΣの中の確率$P(Xy_n\leqq z)$は$n>0$のときは$F_X(z/y_n)$で、$n=0$に対しては$z<0$のときはそれは不可能事象の確率で0であり、$z\geqq 0$のときはそれは確実な事象の確率で1であり、$n<0$のときは$y_n<0$であるから

$$P(Xy_n\leqq z)=P(X\geqq z/y_n)=1-P(X<z/y_n)$$
$$=1-F_X(z/y_n)+P(X=z/y_n)=1-F_X(z/y_n)\quad(\because F_X(\cdot)\text{は絶対連続})$$

である。よって、

$$F_Z(z)=p_0H(z)+\sum_{n=1}^{\infty}\{p_{-n}(1-F_X(z/y_{-n})+p_nF_X(z/y_n))\}$$

となる。ここに、$H(z)$はヘビサイド(Heaviside)関数で$z<0$では$H(z)=0$、$z\geqq 0$では$H(z)=1$なる関数である。計算により、$F_Z(0)=(1-F_X(0))F_Y(0)+F_X(0)(1-F_Y(0)+p_0)$であることは直ぐ分かる(このことから、興味深いことに、$F_Z(0)=F_X(0)$であったとするとそれは$F_X(0)=0$か又は$F_Z(0)=(1+p_0)/2$の場合であることが分かる)。そうするとその密度関数は拡張された関数で

$$f_Z(z)=p_0\delta(z)+\sum_{n=1}^{\infty}\{-(p_{-n}/y_{-n})f_X(z/y_{-n})+(p_n/y_n)f_X(z/y_n)\}$$

となる。ここに、$\delta(z)$はディラックのデルタ関数である。$f_Z(0)=\infty$である。

Xが区間$(0,1)$上の一様分布であるとき、$f_X(z/y_n)$は$n>0$のとき$0<z<y_n$のとき値1を取り、その他のzの所で0であり、$f_X(z/y_{-n})$は$y_{-n}<z<0$のとき値1を取り、その他のzの所で0となるから、よって、$f_Z(z)$は各$k=1,2,\cdots$に対して以下の各区間で

$z<0$のとき　　　　　　$z>0$のとき

$$y_{-k}<z<y_{-k+1}\text{では}\ \sum_{n=k}^{\infty}\frac{p_{-n}}{(-y_{-n})}\ ;\ y_{k-1}<z<y_k\text{では}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{p_n}{y_n}$$

という値を取る階段関数である。$f_Z(0)=\infty$であるからこれは$z=0$をモードとする離散的な単峰関数である。これは、既に指摘したように、拡張された密度関数なのであって、それが真正(proper)であるためは、その和の順序を変えても良いとすると

$$⑩\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{np_{-n}}{(-y_{-n})}+p_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{np_n}{y_n}=1$$

でなければならないことが分かる。⑩の左辺は確率変数Yのほぼ(-1)次の絶対モーメントである。$f_Z(z)$が$z=0$で右連続になるのは原点に確率質量が有って(、つまり、$p_0>0$で)

⑪ $$p_0=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n p_n}{y_n}$$

のときである。それでYが非負の確率変数だとすると$p_{-n}=0$ $(n=1, 2, \cdots)$で$p_0=1/2$の場合に限ることになる。

逆に、以上の論理を逆に辿れば、任意に与えられた$z=0$をモードとする離散的な単峰な分布$\{q_n\}$を持つ確率変数Zから対応する積表示のYの分布$\{p_n\}$を⑩を満たすものであるとして$p_0=q_0$, $q_n=(n p_n)/y_n$, $q_{-n}=(n p_{-n})/(-y_{-n})$ $(n=1, 2, \cdots)$から決めることでそのヒンチンの積表示が実現する。但し、その下線部分は微妙なのである。精密には⑩を満たす確率分布$\{p_n\}$が有るときということになるべきである。

さてYが任意の確率分布関数$F_Y(\cdot)$を持つとすればそれは①に示されるようにその離散部分$F_{Yd}(\cdot)$と連続部分$F_{Yc}(\cdot)$の或る確率αによる混合で表される。それと独立な区間$(0, 1)$上で一様分布する確率変数Xとの独立な和が伴に0をモードとする確率分布関数なのであるからそれらの混合で表されるZは0をモードとする単峰な確率分布関数を持つことになる。これで確率変数Zが(素朴に定義された)単峰分布をするための必要十分条件は区間$(0, 1)$上で一様分布する確率変数Xとそれとは独立な適当な分布の確率変数Yとの積で表示されることであるという一般的なヒンチンの定理が証明された。

参考文献

Chung, K.L., A Course in Probability Theory, Harcourt, New York, 1968

Feller, An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Vol. II, 1971;1966年版はその初版本で1971年のものは第２版であるがFellerはその前年の1970年に亡くなっているのでその改訂はその弟子が行ったものである。国沢清典による監訳は1966年のものであるが1971年版158頁の単峰性の理論の内容は改められてはいなかった。

B.V. Gnedenko and A.N. Kolmogorov, Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables, Moskow-Leningrad, 1949 (In Russian)

I.A. Ibragimov, "On the Composition of Unimodal Distributions," Theory of Probability and and Its Applications, Volume 1, 1956, 255-260.

J. Keilson and H. Gerber, "Some Results for Discrete Unimodality," *Journal of the American Statistical Association,* June 1971, Volume 66, Number 334, Theory and Methods Section, 386-389.

Keilson, J., Markov Chains Models－Rarity and Exponentiality, Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin, 1979.

小松勇作著「解析概論Ｉ」、1961年(初版)廣川書店刊

Parzen, E., Modern Probability Theory and Its Applications, Johen Wiley & Sons, Inc., 1960.

Shepp, L.A., "Symmetric Random Walk," Trans. Amer. Math. Soc., 104, 144-153, 1962.

Sudhakar Dharmadhikari and Kumar Joag-Dev, Unimodality, Convexity, and Applications, Academic Press, Inc., 1988